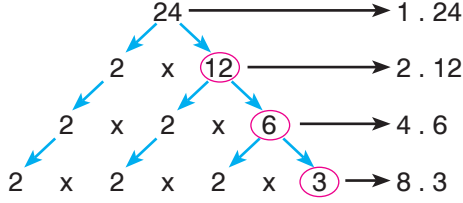


POZİTİF TAM SAYILARIN ÇARPANLARI

Her pozitif tam sayı, iki doğal sayının çarpımı olarak yazılabilir. Bu iki doğal sayıdan her birine o sayının **çarpanı** denir. Bir sayının çarpanı aynı zamanda o sayının kalansız bölenidir.

24 sayısının çarpanlarını çarpan ağacı oluşturarak bulalım.



- Yukarıdaki çarpan ağacına göre 24'ün çarpanları 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24'tür.
- 24 sayısının sekiz tane pozitif çarpanı vardır. Bu çarpanların her biri 24'ü kalansız böler.

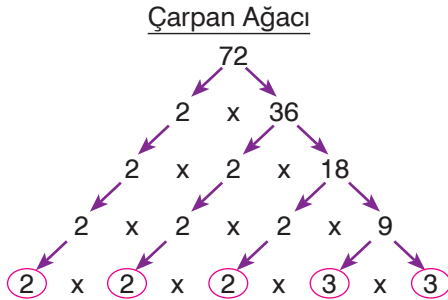
Pozitif Tam Sayıların Asal Çarpanları

Pozitif bir tam sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için "asal çarpan algoritması" yöntemi kullanılır. Bu yöntemde pozitif tam sayı, en küçük asal sayıdan başlanarak sürekli asal sayılara bölünür. Bölüm 1 olana kadar bölme işlemi devam ettirilir.

1'den büyük, 1 ve kendisinden başka sayma sayısı böleni olmayan doğal sayılara **asal sayılar** denir.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ kümesine asal sayılar kümesi denir. Asal sayılar kümesinde 2'den başka çift doğal sayı yoktur.

72 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.



Asal Çarpan Algoritması

72	2	(72 : 2 = 36)
36	2	(36 : 2 = 18)
18	2	(18 : 2 = 9)
9	3	(9 : 3 = 3)
3	3	(3 : 3 = 1)
1		

- 72 sayısının asal çarpanları 2 ve 3 olur.
- 72 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazımı $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ olur.
- 72 sayısının üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazımı $72 = 2^3 \cdot 3^2$ olur.

ÖRNEK

60 sayısını, asal sayıların çarpımı şeklinde nasıl yazılır?

Çözüm:	60	2	• 60 sayısının asal çarpanları 2, 3 ve 5 olur.
	30	2	• 60 sayısının asal sayıların çarpımı şeklinde yazımı
	15	3	$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olur.
	5	5	
	1		

EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN

İki veya daha fazla doğal sayının (sıfırdan farklı) ortak bölenlerinin en büyüğüne **en büyük ortak bölen** denir. Kısaca "EBOB" diye yazılır.

18 ve 24 sayılarının en büyük ortak böleni kaçtır?

1. yol : 18 ve 24 sayılarının bölenlerini yazalım.

18'in bölenleri : (1), (2), (3), (6), 9, 18

24'ün bölenleri : (1), (2), (3), 4, (6), 8, 12, 24

18 ve 24'ün ortak bölenleri : 1, 2, 3, 6 olup ortak bölenlerinin en büyüğü 6'dır.

2. yol : 18 ve 24 sayılarının en büyük ortak bölenini asal çarpanlar algoritması kullanarak bulalım.

Bu yöntemde sayılar en küçük asal sayıdan başlanarak bölünür, her iki sayıyı birlikte bölen asal sayılar işaretlenir. İşaretlenen asal sayıların çarpımı EBOB u verir.

18	24	(2) → 18 ve 24 sayılarını bölüyor.
9	12	2
9	6	2
9	3	(3) → 9 ve 3 sayılarını bölüyor.
3	1	3
1		

$$\text{EBOB}(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$

ÖRNEK

24, 36 ve 72 sayılarının en büyük ortak böleni kaçtır?

Çözüm: 24 36 72 (2) → 24, 36 ve 72 sayılarını bölüyor.

12 18 36 (2) → 12, 18 ve 36 sayılarını bölüyor.

6 9 18 2

3 9 9 (3) → 3, 9 ve 9 sayılarını bölüyor.

1 3 3 3

1 1

$$\text{EBOB}(24, 36, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

ÖRNEK

20 ve 28 litrelik iki farklı yağ birbiriyle karıştırılmadan eşit hacimli kaplara konulacaktır.

a) Kapların hacmi en fazla kaç litre olmalıdır?

b) Bu iş için en az kaç tane kap gereklidir?

Çözüm: Verilen yağların en büyük ve eşit hacimli kaplara konulması isteniyor. Bu durumda sayıların EBOB ları bulunur.

20 28 (2) a) Her bir kap 4 litrelik olmalıdır.

10 14 (2) b) $(20 : 4) + (28 : 4) = 5 + 7 = 12$ kap gereklidir.

5 7 5

1 7 7

1

$$\text{EBOB}(20, 28) = 2 \cdot 2 = 4$$

EN KÜÇÜK ORTAK KAT

İki veya daha fazla doğal sayının (sıfırdan farklı) ortak katlarının en küçüğüne **en küçük ortak kat** denir. Kısaca “EKOK” diye yazılır.

12 ve 18 sayılarının en küçük ortak katı kaçtır?

1. yol : 12 ve 18 sayılarının katlarını yazalım.

12'nin katları : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192...

18'in katları : 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198...

12 ve 18'in ortak katları : 36, 72, 108, 144, 180... olup ortak katlarının en küçüğü 36'dır.

2. yol : 12 ve 18 sayılarının en küçük ortak katını asal çarpanlar algoritması kullanarak bulalım.

Bu yöntemde sayılar en küçük asal sayıdan başlanarak bölünür, bulunan bütün asal sayıların çarpımı EKOK u verir.

12	18	2	
6	9	2	EKOK (12, 18) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$
3	9	3	
1	3	3	
	1		

ÖRNEK

Aynı hastanede çalışan iki doktordan biri 8 günde bir, diğeri ise 10 günde bir nöbet tutmaktadır. Bu iki doktor aynı gün nöbet tuttuktan kaç gün sonra tekrar birlikte nöbet tutar?

Çözüm: Bu iki sayının EKOK u bulunmalıdır.

8	10	2	
4	5	2	
2	5	2	
1	5	5	EKOK (8, 10) = $2^3 \cdot 5 = 40$
	1		Doktorlar 40 gün sonra tekrar birlikte nöbet tutarlar.

15 ve 18 sayılarının EKOK ve EBOB unu bulalım.

15 18 | 2 EKOK (15, 18) = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

15 9 | 3 EBOB (15, 18) = 3

5	3	3
5	1	5
1		

A ve B sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere

$A \cdot B = \text{EKOK}(A, B) \cdot \text{EBOB}(A, B)$ dir.

ARALARINDA ASAL SAYILAR

İki veya daha fazla doğal sayının 1'den başka ortak böleni yoksa bu sayılara **aralarında asal sayılar** denir.

10 ve 21 sayılarının EBOB ve EKOK larını bulalım.

10 21 | 2 EKOK (10, 21) = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

5 21 | 3 10 ve 21 sayıları aralarında asal olduğundan EKOK (10, 21) = $10 \cdot 21 = 210$ 'dur.

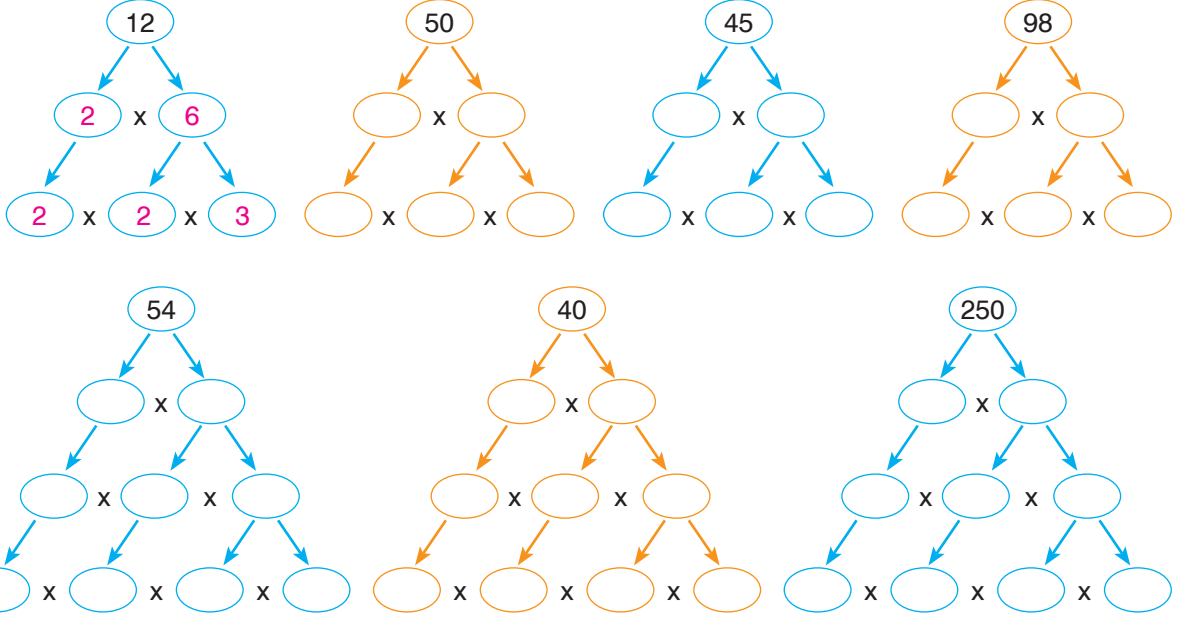
5 7 | 5 Bu sayıların 1'den başka ortak bölenleri olmadığından EBOB (10, 21) = 1 olur.

1	7	7
	1	

Aralarında asal olan iki sayının EKOK u bu sayıların çarpımına eşittir, EBOB u ise 1'dir.

Alıştırma : Asal Çarpanlar

A Verilen sayıların çarpanlarına göre çarpan ağaçlarını tamamlayın.



B Verilen sayıların asal çarpanlarını bulun ve verilen sayıları üslü ifade veya üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazın.

108 2 54 27 9 3 3 3 1	144	500	81	48
108 = $2^2 \cdot 3^3$	144 =	500 =	81 =	48 =
36	64	180	100	450
36 =	64 =	180 =	100 =	450 =

Çarpanlar ve Katlar

Kazanım 8.1.1.1 : Verilen pozitif tam sayıların çarpanlarını bulur; pozitif tam sayıları üslü ifade ya da üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazar.

Alıştırma : EBOB - EKOK

Aşağıda verilen sayı gruplarının EBOB ve EKOK larını bulun.

12 18 (2)
6 9 2
3 9 (3)
1 3 3
1

$$\text{EBOB}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{EKOK}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

15 20

$$\text{EBOB}(15, 20) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(15, 20) = \dots\dots\dots$$

12 16

$$\text{EBOB}(12, 16) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(12, 16) = \dots\dots\dots$$

24 36

$$\text{EBOB}(24, 36) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(24, 36) = \dots\dots\dots$$

30 45

$$\text{EBOB}(30, 45) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(30, 45) = \dots\dots\dots$$

16 24

$$\text{EBOB}(16, 24) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(16, 24) = \dots\dots\dots$$

12 18 36

$$\text{EBOB}(12, 18, 36) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(12, 18, 36) = \dots\dots\dots$$

20 30 40

$$\text{EBOB}(20, 30, 40) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(20, 30, 40) = \dots\dots\dots$$

24 36 48

$$\text{EBOB}(24, 36, 48) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(24, 36, 48) = \dots\dots\dots$$

15 60 90

$$\text{EBOB}(15, 60, 90) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(15, 60, 90) = \dots\dots\dots$$

9 27 81

$$\text{EBOB}(9, 27, 81) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(9, 27, 81) = \dots\dots\dots$$

16 32 64

$$\text{EBOB}(16, 32, 64) = \dots\dots\dots$$

$$\text{EKOK}(16, 32, 64) = \dots\dots\dots$$

Çarpanlar ve Katlar

Kazanım 8.1.1.2 : İki doğal sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) ve en küçük ortak katını (EKOK) hesaplar; ilgili problemleri çözer.

1. Boyutları 18 cm, 24 cm ve 42 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutu içine eşit büyüklükte en az kaç küp yerleştirilir?

Çözüm: Büyük bir bütünün içine daha küçük parçalar yerleştirileceğinden soru EBOB ile çözülür.

18	24	42	2 ✓
9	12	21	2
9	6	21	2
9	3	21	3 ✓
3	1	7	3
1		7	7
		1	

$$\text{EBOB}(18, 24, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

Bulduğumuz EBOB, küplerin bir ayrıtıdır.

Dikdörtgenler prizmasının hacmi x tane küple dolsun.

$$18 \cdot 24 \cdot 42 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot x$$

$$x = 84 \text{ bulunur.}$$

2. Boyutları 6 cm, 10 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutular, küp şeklindeki bir koliye hiç boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilmek isteniyor.

- a) Kolinin bir kenar uzunluğu en az kaç santimetre olmalıdır?

- b) Kolinin içine en az kaç tane kutu yerleştirilebilir?

3. Burcu hasta olduğu için kullandığı üç hapi 6, 8 ve 10 saat arayla almaktadır. Hapları birlikte aldıktan kaç saat sonra üç hapi da üçüncü kez birlikte alır?

Çözüm:

6	8	10	2
3	4	5	2
3	2	5	2
3	1	5	3
1		5	5
		1	

$$\text{EKOK}(6, 8, 10) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Bulduğumuz EKOK, hapların kaç saatte bir tekrar birlikte alındığına karşılık gelir. 120 saat sonra üç hap ilk kez birlikte alınır. Buna göre $120 \cdot 3 = 360$ saat sonra üç hap, üçüncü kez birlikte alınır.

4. Bir fabrikada 15 dk, 30 dk ve 45 dk aralıklarla çalan üç zil vardır.

- a) Bu üç zil aynı anda çaldıktan en az kaç dakika sonra tekrar aynı anda çalar?

- b) Bu üç zil saat 09.30'da aynı anda çaldıktan sonra ilk kez saat kaçta tekrar birlikte çalar?

5. Kenarları 45 m, 60 m ve 90 m uzunluğunda olan üçgen şeklindeki bir arsanın etrafına köşelere de dikmek koşuluyla eşit aralıklarla en az kaç ağaç dikilir?

Çözüm:

45	60	90	2
45	30	45	2
45	15	45	3✓
15	5	15	3
5	5	5	5✓
1	1	1	

EBOB (45, 60, 90) = 3 . 5 = 15

Bulduğumuz EBOB, iki ağaç arasında alınabilecek en büyük mesafedir. En az ağaç dikmek için iki ağaç arasındaki mesafe en fazla olmalıdır.

$$(45:15) + (60:15) + (90:15) = 3 + 4 + 6 = 13 \text{ ağaç}$$

6. Kenar uzunlukları 240 m ve 300 m olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın etrafına eşit aralıklarla (köşelere de yerleştirilmek koşuluyla) direkler dikilecektir.
Bu iş için en az kaç direk gerekir?

7. Dikdörtgensel bölge şeklindeki bir balkonun tabanının kenar uzunlukları 2 m ve 2,6 m dir. Bu balkonun tabanı karesel bölge şeklindeki karolarla kaplanmak isteniyor.
Buna göre en az kaç karo kullanılmalıdır?

8. Bir öğretmen kalemlerini beşerli dağıttığında dört, altışarlı dağıttığında beş, yedişerli dağıttığında ise 6 kalem artıyor.
Kalem sayısı 400 ile 500 arasında olduğuna göre kaç kalem vardır?

Çözüm: EKOK (5, 6, 7) = 5 . 6 . 7 = 210
Kalem sayısı 400 ile 500 arasında ise EKOK'un katları bulunur.
 $210 \cdot 2 = 420$
 $420 - 1 = 419$ kalem vardır.

9. Bir gruptaki izciler 10'arlı, 12'şerli ve 15'erli sıra olduğunda her seferinde 2 izci sıranın dışında kalıyor.
a) Bu gruptaki izci sayısı en az kaçtır?

b) Gruptaki izci sayısı 100'den fazla ise bu sayı en az kaçtır?

10. Kısa kenarı 60 cm, uzun kenarı 72 cm olan dikdörtgen şeklindeki fayanslardan en az kaç tanesi bir araya getirilerek bir kare oluşturulur?

11. 75 m ve 60 m uzunluğundaki iki ayrı top kumaş her bir parça eşit uzunlukta olacak şekilde kesiliyor.
Bu işlem sonunda en az kaç parça kumaş elde edilir?

12. Kenar uzunlukları 24 cm ve 36 cm olan bir dikdörtgen içerisine hiç boşluk kalmayacak şekilde en az kaç eş kare çizilebilir?

13. Kenar uzunlukları 24 m ve 18 m olan dikdörtgen şeklindeki bir levhadan eşit büyüklükte en az kaç kare parça elde edilir?

14. Esin'in elinde 500 tane oyun kartı vardır. Esin'in kaç oyun kartı daha olsaydı kartlarını 18'erli, 24'erli ve 42'şerli gruplayabilirdi?

15. Boyutları 36 m ve 60 m olan dikdörtgen biçimindeki tarlanın kenarlarına köşelere de gelecek şekilde eşit aralıklarla en az kaç ağaç dikilir?

Çarpanlar ve Katlar

Kazanım 8.1.1.2 : İki doğal sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) ve en küçük ortak katını (EKOK) hesaplar; ilgili problemleri çözer.

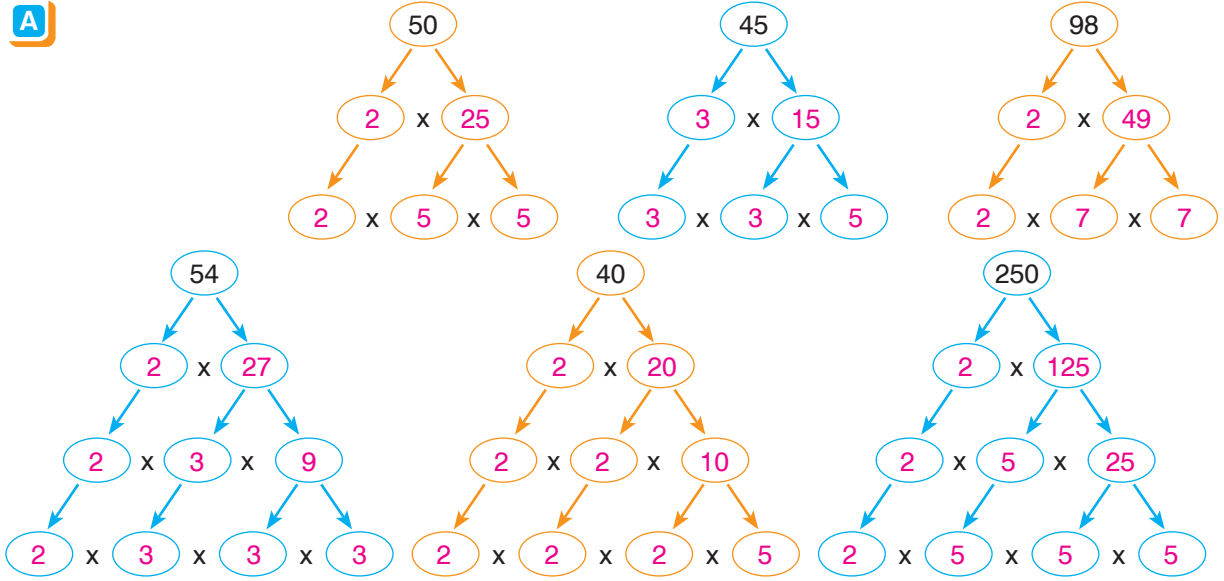
1. ÜNİTE

SAYILAR VE İŞLEMLER

1. BÖLÜM: Çarpanlar ve Katlar

s. 11 Alıştırma: Asal Çarpanlar

A



B

144 2 72 2 36 2 18 2 9 3 3 3 1	500 2 250 2 125 5 25 5 5 5 1	81 3 27 3 9 3 3 3 1	48 2 24 2 12 2 6 2 3 3 1
$144 = 2^4 \cdot 3^2$	$500 = 2^2 \cdot 5^3$	$81 = 3^4$	$48 = 2^4 \cdot 3$

36 2 18 2 9 3 3 3 1	64 2 32 2 16 2 8 2 4 2 2 2 1	180 2 90 2 45 3 15 3 5 5 1	100 2 50 2 25 5 5 5 1	450 2 225 3 75 3 25 5 5 5 1
$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$64 = 2^6$	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$100 = 2^2 \cdot 5^2$	$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

s. 12 Alıştırma: EBOB - EKOK

15	20	2
15	10	2
15	5	3
5	5	⑤
1	1	

EBOB (15, 20) = 5.....
EKOK (15, 20) = 2² . 3 . 5 = 60.....

12	16	②
6	8	②
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1		

EBOB (12, 16) = 2 . 2 = 4.....
EKOK (12, 16) = 2⁴ . 3 = 48.....

24	36	②
12	18	②
6	9	2
3	9	③
1	3	3
1		

EBOB (24, 36) = 2² . 3 = 12.....
EKOK (24, 36) = 2³ . 3² = 72.....

30	45	2
15	45	③
5	15	3
5	5	⑤
1	1	

EBOB (30, 45) = 3 . 5 = 15.....
EKOK (30, 45) = 2 . 3² . 5 = 90.....

16	24	②
8	12	②
4	6	②
2	3	2
1	3	3
1		

EBOB (16, 24) = 2³ = 8.....
EKOK (16, 24) = 2⁴ . 3 = 48.....

12	18	36	②
6	9	18	2
3	9	9	③
1	3	3	3
1	1		

EBOB (12, 18, 36) = 2 . 3 = 6.....
EKOK (12, 18, 36) = 2² . 3² = 36.....

20	30	40	②
10	15	20	2
5	15	10	2
5	15	5	3
5	5	5	⑤
1	1	1	

EBOB (20, 30, 40) = 2 . 5 = 10.....
EKOK (20, 30, 40) = 2³ . 3 . 5 = 120.....

24	36	48	②
12	18	24	②
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	③
1	3	1	3
1			

EBOB (24, 36, 48) = 2² . 3 = 12.....
EKOK (24, 36, 48) = 2⁴ . 3² = 144.....

15	60	90	2
15	30	45	2
15	15	45	③
5	5	15	3
5	5	5	⑤
1	1	1	

EBOB (15, 60, 90) = 3 . 5 = 15.....
EKOK (15, 60, 90) = 2² . 3² . 5 = 180.....

9	27	81	③
3	9	27	③
1	3	9	3
	1	3	3
		1	

EBOB (9, 27, 81) = 3² = 9.....
EKOK (9, 27, 81) = 3⁴ = 81.....

16	32	64	②
8	16	32	②
4	8	16	②
2	4	8	②
1	2	4	2
	1	2	2
		1	2

EBOB (16, 32, 64) = 2⁴ = 16.....
EKOK (16, 32, 64) = 2⁶ = 64.....

s. 13-15 Alıştırma: EBOB - EKOK Problemleri

- 2. a)** EKOK(6, 10, 12) = 60 cm
b) 60 . 60 . 60 = 6 . 10 . 12 . x
x = 300

- 4. a)** EKOK(15, 30, 45) = 90 dk
b) 90 dk = 1 saat 30 dk
09.30 + 01.30 = 11.00

- 6** EBOB(240, 300) = 60 m
Dikdörtgenin çevresi = 2 . (240 + 300)
= 1080 m
1080 : 60 = 18 direk

- 7.** 2 m = 200 cm
2,6 = 260 cm
EBOB(200, 260) = 20
200 . 260 = 20 . 20 . x
x = 130